

*MEDICIÓN DEL PERÍODO DE REVOLUCIÓN*  
*DE*  
*LOS SATÉLITES GALILEANOS*

Autores:

Javier J. Ricart - Ignacio Llorens



Universidad de Buenos Aires  
Colegio Nacional de Buenos Aires

Título del Proyecto: Medición del período de revolución de los satélites galileanos.

Escuela: Colegio Nacional de Buenos Aires

Dirección: Bolívar 263, C.P. 1066, Capital Federal.

Teléfono: 331-0734/6777/0733/1290

Autores:

Nombre: Javier José Ricart

D.N.I.: 26.781.612

Fecha de nacimiento: 23/08/78

Edad: 18 años

Nombre: Juan Ignacio Llorens

D.N.I.: 26.800.570

Fecha de nacimiento: 21/08/78

Edad: 18 años

Tutor:

Nombre: Luis Gabriel López

D.N.I.: 22.501.839

Fecha de nacimiento: 23/12/71

Edad: 24 años

“Para ser aceptada como conocimiento científico,  
una verdad debe ser una deducción de otras verdades.”

*Aristóteles*

“El conocimiento es el alimento del alma”

*Platón*

## ÍNDICE

	Pág.
Resumen_____	1
Introducción_____	2
Lugar de Trabajo	
Material Utilizado	
Consideraciones preliminares, análisis teórico del problema y planteo de su resolución práctica_____	3
Procedimiento Matemático_____	11
Programa realizado en Turbo Pascal_____	14
Resultados finales obtenidos_____	19
Conclusiones e impresiones finales_____	20
Aplicación de los resultados y proyección de nuevos trabajos_____	21
Apéndice A_____	22
Apéndice B_____	27
Bibliografía consultada_____	32
Agradecimientos_____	34

## Resumen:

El objetivo del presente trabajo es medir con la mayor exactitud posible el período de revolución (período orbital) de los cuatro satélites principales del planeta Júpiter; esto es, el tiempo que dichos cuerpos celestes tardan en dar una vuelta completa alrededor del planeta más grande del Sistema Solar. Para ello debimos analizar el movimiento de los satélites en torno a Júpiter, la forma en que dicho movimiento se observa desde la Tierra y decidir cual de los elementos físico-matemáticos que teníamos a nuestra disposición nos ayudarían a obtener la variable de tiempo buscada.

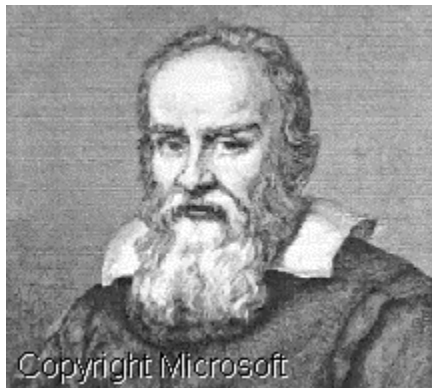
Las observaciones astronómicas y mediciones correspondientes se realizaron entre el 20 de Septiembre de 1995 y el 3 de Noviembre del mismo año.

Tras comparar los resultados alcanzados con los valores recogidos de la bibliografía, podemos concluir que la metodología utilizada ha resultado ser eficaz ya que las diferencias entre los valores reales y los obtenidos fueron mínimas.

## Introducción:

Los satélites galileanos (Io, Europa, Ganímedes y Calisto) son las cuatro lunas más importantes del planeta Júpiter. Galileo fue el primero en verlas el 7 de enero de 1610, y al comprobar que giraban alrededor de Júpiter, dispuso de una de las primeras pruebas experimentales respecto a que no todos los cuerpos celestes giraban en torno a la Tierra (de hecho, actualmente sabemos que sólo la Luna y los satélites artificiales terrestres lo hacen), con lo cual fundaba una nueva visión del universo basada en las ideas copernicanas del heliocentrismo.

Nuestro propósito, pues, consistió en determinar los períodos de dichas revoluciones orbitales, al tiempo de recordar la gesta galileana.



Galileo Galilei

Lugar de Trabajo: Observatorio "Héctor Ottonello" del Colegio Nacional de Buenos Aires, Bolívar 263, Buenos Aires, Argentina.

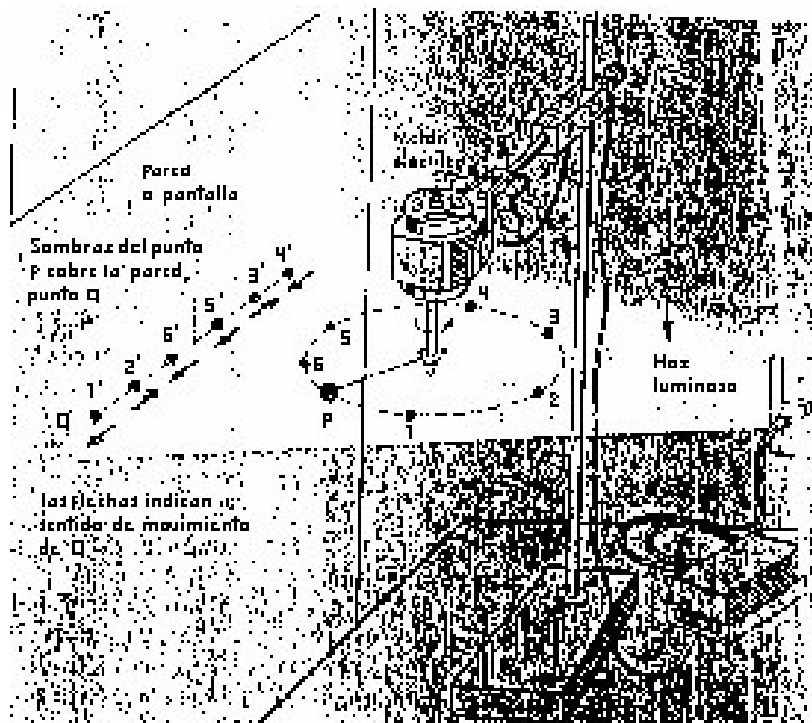
## Material utilizado:

- Telescopio Schmidt-Cassegrain de 304,8 mm de abertura y 3048 mm de distancia focal
- Cronómetro.
- Ocular reticulado.
- Programa compilador del lenguaje de programación "Pascal".

Consideraciones preliminares,  
análisis teórico del problema  
y planteo de su resolución práctica:

Para los fines de este trabajo se debe aclarar cómo son las órbitas de los satélites naturales de Júpiter y cómo se observan desde la Tierra.

Como es sabido, el movimiento de cualquier cuerpo celeste en órbita cerrada es elíptico o circular. En el caso de los satélites de Júpiter dicho movimiento es casi *circular*<sup>1</sup>, y -como puede demostrarse a partir de este hecho y de las leyes de la gravitación- de velocidad constante, por lo que su proyección sobre una recta contenida en el plano de su órbita puede ser considerada, con una buena aproximación, un *movimiento armónico simple*.



<sup>1</sup> Las excentricidades de las órbitas de los satélites son:

para Io	= 0,004
Europa	= 0,009
Ganímedes	= 0,002
Calisto	= 0,007

Supongamos que el punto P (fig. 1) es un satélite de Júpiter y el punto C el planeta mismo. Si la esfera P tiene un movimiento circular uniforme, lo que se ve en la pared (la proyección de dicho movimiento) resulta ser un movimiento armónico simple (M.A.S.). La trayectoria del movimiento armónico simple es rectilínea y limitada, es decir, que el camino recorrido por la sombra de P no puede sobrepasar las posiciones alcanzadas en 1 y 4. Además, se trata de un movimiento caracterizado por la *repetición* del valor de sus magnitudes físicas (como la posición y la velocidad) después de un cierto intervalo de tiempo llamado período. La ecuación matemática que expresa la relación numérica de las magnitudes físicas involucradas es :

$$X = A. \cos ( w. t + \beta )$$

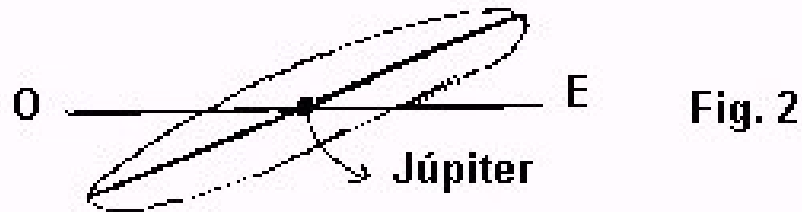
Donde X es la distancia del móvil al centro del movimiento (tomada positiva hacia un lado y negativa hacia el otro, arbitrariamente), A es la amplitud máxima del movimiento, w es la pulsación (igual a  $2\pi/T$ , siendo T el período del movimiento), t el tiempo transcurrido desde el inicio (arbitrario) del mismo y  $\beta$  el ángulo inicial o de fase, cuyo coseno multiplicado por la amplitud (A) nos indica la posición (X) del móvil cuando  $t = 0$ .

Si se ven los satélites de Júpiter utilizando un telescopio se puede descubrir que desde la Tierra no se observan girando alrededor de aquél (como si fueran círculos concéntricos), como descubriríamos si nuestro planeta se encontrara situado cerca de la perpendicular al plano de dichas órbitas, sino que se desplazan aproximadamente de oeste a este y viceversa, teniendo como centro del movimiento al planeta, dado que nos encontramos en un plano casi coincidente con el de las órbitas, y que las mismas se hallan orientadas casi en la dirección de los paralelos celestes<sup>2</sup>. Como la Tierra no está incluida en el plano de la órbita de cada satélite y, por otro lado, dichas órbitas se encuentran inclinadas con respecto a la orientación este-oeste de la esfera celeste, una representación aproximada y exagerada de la observación del conjunto desde nuestro planeta sería la siguiente (fig. 2).

---

<sup>2</sup> En rigor, el plano de dichas órbitas es casi coincidente con el de la Eclíptica, el cual se halla inclinado con respecto al Ecuador Celeste cerca de 23 grados, y es casi coincidente con el plano de todas las órbitas de los planetas del Sistema Solar (exceptuando a Plutón) y las de sus satélites. Sin embargo, al momento de realizarse las observaciones y mediciones Júpiter se encontraba muy cerca del solsticio del verano austral (su declinación era de -22 grados), por lo que su ecuador y el plano de las órbitas de sus satélites se encontraban muy próximos a la dirección este-oeste. De todas formas, y como se desarrollará más adelante, la inclinación con respecto a dicha dirección no representaría un problema a los efectos de nuestro trabajo.





## Movimiento de un satélite visto desde la Tierra

Ahora bien, si el movimiento se observara desde nuestro planeta como un movimiento armónico simple perfecto y orientado paralelamente al Ecuador Celeste, consideramos el siguiente plan para determinar el período de dicho movimiento :

Aplicando la fórmula del M.A.S. ( $X = A \cdot \cos ( w \cdot t + \beta )$ ), siendo X la distancia del satélite a Júpiter en cada instante, A la amplitud máxima del movimiento, w la pulsación, t el tiempo transcurrido desde la primer posición medida y  $\beta$  el ángulo inicial, podemos tratar de medir X y t de la siguiente manera :

Colocamos en el telescopio un ocular reticulado (fig. 3), esto es, un ocular con una cruz de hilos ubicada en el plano focal del instrumento, a fin de resultar visible conjuntamente con los objetos celestes a los que apunta el telescopio.

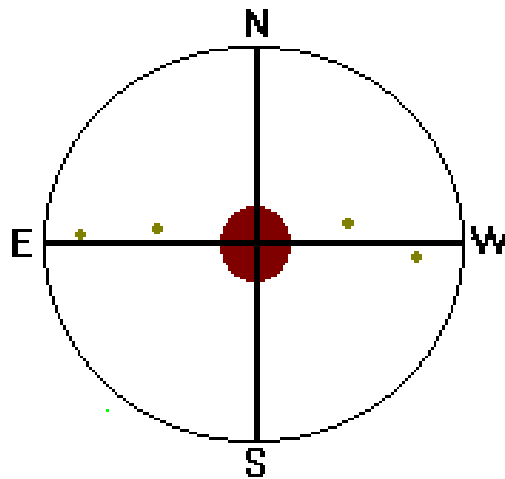
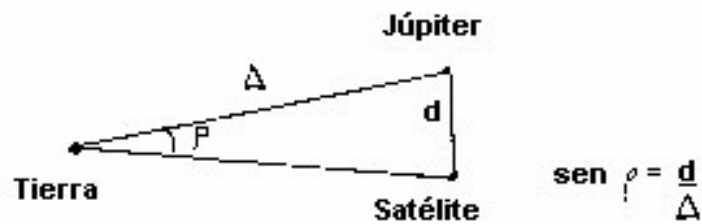


Fig. 3  
Ocular Reticulado

Con la *relojería* del instrumento apagada, es decir, con el telescopio inmóvil con respecto a la Tierra (para permitir que Júpiter y sus satélites deriven en la dirección este-oeste, dada la natural rotación de la esfera celeste), giramos el *ocular* hasta que una de las líneas del retículo quedara paralela al desplazamiento de cada satélite (con lo cual garantizamos que dicha línea se encuentre paralela al Ecuador Celeste). Luego, medimos con un cronómetro el tiempo transcurrido desde que el satélite cruza la línea que indica la dirección norte-sur del retículo hasta que la cruza el meridiano central de Júpiter, o a la inversa según la posición del satélite. Realizamos varias mediciones para obtener luego un promedio y *minimizar* así el *error experimental*.

El tiempo obtenido (Xs) está expresado en segundos de hora, y es proporcional a la distancia del satélite al centro de Júpiter. Para expresar dicha distancia en Km., debemos seguir los siguientes pasos: primero, para pasar de segundos de hora a segundos de arco se debe multiplicar por 15 y luego dividir por el coseno de la declinación (distancia angular al Ecuador Celeste, análogo a la latitud en el sistema de coordenadas geográficas) de Júpiter en el momento de la observación. Finalmente se multiplica el seno de ese ángulo por la distancia a Júpiter y se obtiene X en kilómetros. (Fig. 4)



**Paso de la distancia de segundos de arco a kilómetros**

Fig. 4

La variable t coincide con el momento en que las mediciones se realizaron (no confundir con el valor cronometrado Xs), y se toma como instante inicial (t=0) aquél en que fue tomado el primer conjunto de observaciones.

Con el telescopio y un reloj podemos, pues, obtener dos de las variables (X y t) del M.A.S., quedando tres de ellas sin resolver. Necesitamos entonces un *sistema* de tres ecuaciones para poder averiguar las incógnitas restantes. Podemos hacer tres conjuntos de mediciones (correspondientes a tres instantes t y por consiguiente, a tres posiciones X) para, mediante un sistema de ecuaciones (más adelante detallado) averiguar las incógnitas,

obteniendo entre ellas la pulsación ( $\omega$ ), que nos permitirá averiguar el período ( $T$ ) gracias a la relación  $\omega = 2\pi / T$ .

Sin embargo, y como analizamos más arriba, el movimiento de cada uno de los satélites galileanos no es exactamente un M.A.S., ni coincide con la dirección este-oeste de la esfera celeste, ni es observado por nosotros “de canto”, por lo que nos impusimos la tarea de decidir si las diferencias apuntadas modifican o no el carácter del movimiento, y, en caso afirmativo, si dicha modificación es despreciable o no.

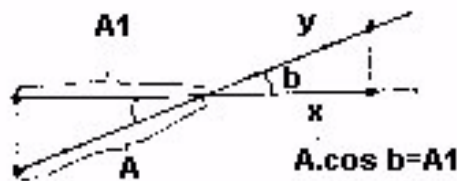
En primer lugar, vimos que el movimiento orbital de los satélites no es perfectamente circular y uniforme (ya que su excentricidad es distinta de cero), por lo que su proyección no puede ser un M.A.S.. Sin embargo, la diferencia es tan mínima que puede ser considerada despreciable, y su error asumido sin inconvenientes.

En segundo lugar, cabe preguntarse si la proyección de un M.A.S. es otro M.A.S. ; como veremos, la respuesta es afirmativa.

Veamos, entonces, cómo la inclinación del movimiento con respecto a la dirección este-oeste no desvirtúa el carácter armónico simple del movimiento:

si  $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + a)$  (por la fórmula del M.A.S.)

$$\cos b = \frac{X}{Y}$$



**Proyección de un M.A.S en otro M.A.S.**

Fig. 5  
Proyección de un M.A.S.  
en otro M.A.S.

vemos que

$$X = A \cdot \cos (w \cdot t + a) \cos b \Rightarrow X = A \cdot \cos b (w \cdot t + a)$$

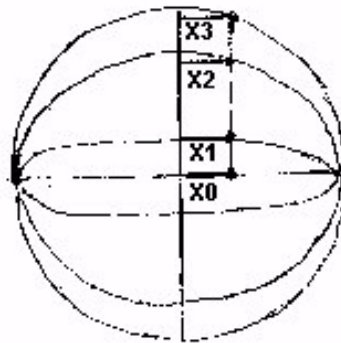
donde  $A \cdot \cos b$  resulta una nueva amplitud ( $A_1$ )

donde como:

$$\begin{aligned} 0 < \cos b < 1 \\ A \cdot 0 < A \cdot \cos b < A \cdot 1 \\ 0 < A_1 < A \quad (\text{para todo } A \neq 0) \end{aligned}$$

La única diferencia, pues, entre el movimiento original y su proyección va a ser la amplitud ( $A$ ), es decir que ni el período ni su condición de armónico simple varían. Dado que la amplitud sí varía, no es posible calcular, mediante este método, la distancia del satélite al planeta.

Por otra parte, la inclinación del plano de la órbita con respecto a la visual Tierra-Júpiter no es un problema, pues la medición se realiza sólo con la componente  $X$  de la posición del satélite sobre la dirección este-oeste, la que resulta ser siempre la misma (Fig. 6). De esta manera, observando la figura siguiente, se ve que todas las proyecciones de las órbitas -inclusive si la Tierra estuviera ubicada en la dirección perpendicular a las mismas, y por lo tanto, se viera el movimiento como circular (o, como hemos aclarado arriba, apenas elíptico)- resultan movimientos armónicos simples.



**$X_0 = X_1 = X_2 = X_3$**   
**Proyección del componente**  
**X con distintas inclinaciones**

Fig. 6

Es necesario, además, tener en cuenta que el período medido no es el período sidéreo, sino el sinódico (esto es, el que se ve desde la Tierra). La diferencia entre uno y otro se debe al movimiento relativo de Júpiter con respecto a la Tierra, como vemos en la figura 7.



Fig. 7

De todos modos, el *desplazamiento orbital* de Júpiter con respecto a la Tierra no fue considerable durante el período de realización de este trabajo<sup>3</sup>, por lo que podemos asumir que la diferencia entre ambos períodos es *despreciable*.

Por último, otro punto a tener en cuenta es que el tiempo (t) correspondiente a cada posición (X) utilizado en los cálculos debería estar corregido con el cociente entre la distancia de la Tierra a Júpiter y la velocidad de la luz (magnitud conocida en astronomía como “tiempo-luz”), puesto que como dicha velocidad es finita, los fenómenos observados por nosotros tuvieron lugar en el “pasado”, mediando entre el presente y dicho momento un intervalo de tiempo igual al “tiempo-luz”. Debido a esto, cualquier cambio en la distancia entre nosotros y los fenómenos observados se traducirán en una diferencia en los instantes de tiempo en que efectivamente tomamos conocimiento de ellos: si Júpiter se acerca, “veremos” que los satélites llegan a los distintos puntos de sus órbitas antes que cuando estaba lejos, y viceversa. Obviamos este factor correctivo en los cálculos pues la distancia a Júpiter no varió sensiblemente a lo largo de este trabajo, por lo que todos los tiempos medidos se encontraron desplazados en una cantidad casi constante<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Entre el 27/10/95 y el 3/11/95, el desplazamiento angular de Júpiter sobre la esfera celeste con respecto a la Tierra fue de menos de 3 grados.

<sup>4</sup> Entre el 27/10/95 y el 3/11/95, la distancia de Júpiter a la Tierra varió en menos de sólo 0,13634 Unidades astronómicas (cerca de 20,5 millones de kilómetros), lo que arroja una diferencia de “Tiempo-luz” máxima de menos de 70 segundos, claramente despreciable frente al valor de los períodos considerados.

Los valores obtenidos durante las sesiones observacionales deben consultarse en el Apéndice A.

## Procedimiento Matemático:

Para resolver el problema de las *tres incógnitas* se necesitan *tres ecuaciones*. Al tratar de simplificarlas encontramos que dicho sistema no tiene solución analítica, por lo que tuvimos que usar un método numérico iterativo para su resolución, que pasamos a describir a continuación y en base a este procedimiento elaboramos nosotros mismos un programa en el lenguaje de programación Pascal para resolver los complicados cálculos finales del trabajo.

Tener en cuenta a lo largo de este procedimiento que:

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

y que

$$\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b$$

El sistema de ecuaciones es el siguiente:

- $X_1 = A \cdot \cos (w \cdot t_1 + \beta)$
- $X_2 = A \cdot \cos (w \cdot t_2 + \beta)$
- $X_3 = A \cdot \cos (w \cdot t_3 + \beta)$

tomando  $X_1 = A \cdot \cos (w \cdot t_1 + \beta)$ , tenemos que

$$\frac{1}{A} = \frac{\cos (w \cdot t_1) \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} (w \cdot t_1) \cdot \operatorname{sen} \beta}{X_1} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{\cos (w \cdot t_1) \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} (w \cdot t_1) \cdot \operatorname{sen} \beta}{X_1} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{\cos (w \cdot t_2) \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} (w \cdot t_2) \cdot \operatorname{sen} \beta}{X_2} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{\cos (w \cdot t_3) \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} (w \cdot t_3) \cdot \operatorname{sen} \beta}{X_3} = \frac{1}{A}$$

$$X_1 \cdot \cos(w \cdot t_2) \cdot \cos \beta - X_1 \cdot \sin(w \cdot t_2) \cdot \sin \beta - X_2 \cdot \cos(w \cdot t_1) \cdot \cos \beta + X_2 \cdot \sin(w \cdot t_1) \cdot \sin \beta = 0$$

$$\sin \beta [X_2 \cdot \sin(w \cdot t_1) - X_1 \cdot \sin(w \cdot t_2)] = \cos \beta [-X_1 \cdot \cos(w \cdot t_2) + X_2 \cdot \cos(w \cdot t_1)] \quad \text{entonces}$$

$$1. ) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{X_2 \cdot \cos(w \cdot t_1) - X_1 \cdot \cos(w \cdot t_2)}{X_2 \cdot \sin(w \cdot t_1) - X_1 \cdot \sin(w \cdot t_2)}$$

En forma similar obtenemos:

$$2. ) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{X_2 \cdot \cos(w \cdot t_3) - X_3 \cdot \cos(w \cdot t_2)}{X_2 \cdot \sin(w \cdot t_3) - X_3 \cdot \sin(w \cdot t_2)}$$

y de 1. ) y 2. ) :

$$\begin{aligned} & [X_2 \cdot \cos(w \cdot t_1) - X_1 \cdot \cos(w \cdot t_2)] \cdot [X_2 \cdot \sin(w \cdot t_3) - X_3 \cdot \sin(w \cdot t_2)] = \\ & = [X_2 \cdot \cos(w \cdot t_3) - X_3 \cdot \cos(w \cdot t_2)] \cdot [X_2 \cdot \sin(w \cdot t_1) - X_1 \cdot \sin(w \cdot t_2)] \end{aligned}$$

Aplicando propiedad distributiva tenemos:

$$X_2 \cdot X_2 \cdot \cos(w \cdot t_1) \cdot \sin(w \cdot t_3) - X_2 \cdot X_3 \cdot \cos(w \cdot t_1) \cdot \sin(w \cdot t_2) - X_1 \cdot X_2 \cdot \cos(w \cdot t_2) \cdot \sin(w \cdot t_3) + X_1 \cdot X_3 \cdot \cos(w \cdot t_2) \cdot \sin(w \cdot t_2) =$$

$$= X_2 \cdot X_2 \cdot \cos(w \cdot t_3) \cdot \sin(w \cdot t_1) - X_2 \cdot X_1 \cdot \cos(w \cdot t_3) \cdot \sin(w \cdot t_2) - X_3 \cdot X_2 \cdot \cos(w \cdot t_2) \cdot \sin(w \cdot t_1) + X_1 \cdot X_3 \cdot \cos(w \cdot t_2) \cdot \sin(w \cdot t_2)$$

y entonces cancelando miembros iguales:

$$X_2 \cdot X_2 \cdot \sin(w \cdot t_3 - w \cdot t_1) - X_2 \cdot X_3 \cdot \sin(w \cdot t_2 - w \cdot t_1) - X_1 \cdot X_2 \cdot \sin(w \cdot t_3 - w \cdot t_2) = 0$$

$$X_2 \cdot \sin(w \cdot (t_3 - t_1)) - X_3 \cdot \sin(w \cdot (t_2 - t_1)) - X_1 \cdot \sin(w \cdot (t_3 - t_2)) = 0 \quad (\text{para todo } X_2 \text{ distinto de } 0)$$

De todo lo cual obtenemos la siguiente fórmula :

$$X_1 \cdot \sin[w \cdot (t_3 - t_2)] + X_2 \cdot \sin[w \cdot (t_1 - t_3)] + X_3 \cdot \sin[w \cdot (t_2 - t_1)] = 0$$

Ahora, teniendo en cuenta que:

$$w = \frac{2 \cdot \pi}{T} ,$$



$$X_1 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_3 - t_2)] + X_2 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_1 - t_3)] + X_3 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_2 - t_1)] = 0$$

Si tomamos como función:

$$F(T) = X_1 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_3 - t_2)] + X_2 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_1 - t_3)] + X_3 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_2 - t_1)]$$

El problema se reduce a hallar el valor de T para el cual la función se hace cero. Este valor será el que buscamos.

Sin embargo, una vez ejecutado nuestro programa nos encontramos con algunas dificultades, que analizaremos conjuntamente con el funcionamiento del mismo a continuación.

## Programa realizado en Turbo Pascal

Program galileanos;

```
{ ***** SECCION A ***** }
```

```
uses graph, varios, crt;
```

```
const
```

```
  luna = 'Io';  
  pi2 = 2 * pi;  
  segarc = 16.06717490455544; { Constante para pasar de segundos de hora a kilómetros }  
  x1 = 6.69 * segarc;  
  x2 = 5.59 * segarc;  
  x3 = -3.48 * segarc;  
  t1 = 0;  
  t2 = 2 + ( ( 20 + 50 / 60 ) - ( 20 + 43 / 60 ) ) / 24;  
  t3 = 3 + ( ( 20 + 18 / 60 ) - ( 20 + 43 / 60 ) ) / 24;  
  xmin = 0.1;  
  xmax = 10;  
  ymin = -1000;  
  ymax = 1000;  
  FactorX = 640 / (xmax - xmin);  
  FactorY = 480 / (ymax - ymin);  
  paso = (xmax - xmin) / 10;
```

```
var min, max, med, dif, periodo, sinb, cosb,  
    radio, x, y: real;  
    sg1, sg2, i: integer;  
    dias, horas, minutos, cad: string;
```

```
function PosX( px: real): integer;
```

```
begin
```

```
  PosX:= round((px - xmin) * factorX);
```

```
end;
```

```
function PosY( py: real): integer;
```

```
begin
```

```
  PosY:= 480 - round((py - ymin) * FactorY);
```

```
end;
```

```
function signo( test: real): integer;
```

```
begin
```

```
  if test > 0 then signo:= 1;
```

```
if test < 0 then signo:= -1;
if test = 0 then signo:= 0;
end;
```

```
{ ***** SECCION B ***** }
```

```
begin
  min:= 1.8;
  max:= 2.3;
  InitVGA(' ');
  setcolor( white );
  floodfill( 0, 0, white );
  setcolor( black );
  for i:= 1 to 10 do
    line( PosX(round(paso * i + xmin)), PosY(0) - 4,
          PosX(round(paso *i + xmin)), PosY(0) + 4);
  line( PosX(0), 0, PosX(0), 480);
  line( 0, PosY(0), 640, PosY(0));
  outtextXY( 500, 0, caps(luna));
  if paso >= 1
    then outtextxy( 500, 12, ' paso: ' + cadena(round(paso)))
    else outtextxy( 500, 12, ' paso: 1' );
```

```
{ ***** SECCION C ***** }
```

```
x:= xmin;
setcolor(red);
while x <= xmax do
begin
  if x <> 0 then
    y:= x1 * SIN(pi2 * (t3 - t2) / x)
      + x2 * SIN(pi2 * (t1 - t3) / x)
      + x3 * SIN(pi2 * (t2 - t1) / x);
  if x = xmin then
    moveto(PosX(x), PosY(y));
    lineto(PosX(x), PosY(y));
    X:= X + paso / 50;
end;
```

```
{ ***** SECCION D ***** }
```

```
setcolor(black);
repeat
```

```

dif:= (max - min) / 2;
med:= min + dif;
sg1:= signo( x1 * sin(pi2 * (t3 - t2) / min)
  + x2 * sin(pi2 * (t1 - t3) /min)
  + x3 * sin(pi2 * (t2 - t1) /min) );
sg2:= signo( x1 * sin(pi2 * (t3 - t2) / med)
  + x2 * sin(pi2 * (t1 - t3) /med)
  + x3 * sin(pi2 * (t2 - t1) /med) );
if sg1 = sg2
  then min:= med
  else max:= med;
until dif < 1E-10;
periodo:= med;
dias:= cadena(trunc(periodo));
horas:= cadena(trunc(frac(periodo) * 24));
minutos:= cadena(trunc(frac( frac(periodo) * 24) * 60));
  outtextXY( 200, 400, ' Periodo de ' + luna + ' : ' + dias +
    ' días, ' + horas + ' horas, ' + minutos + ' minutos' );
press;
  closegraph;
end.

```

- En la sección A se encuentra la declaración de *constantes*. Este sector se modifica colocando los datos obtenidos para cada luna. Todas las variables y funciones declaradas son de uso interno del programa.

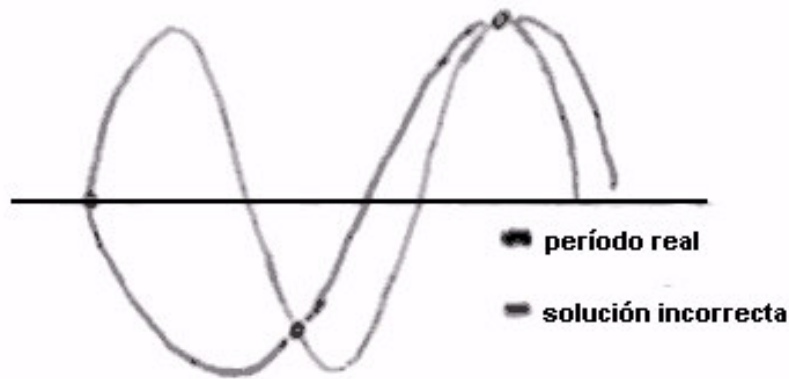
- En la sección B se preparó el sistema de ejes cartesianos sobre el cual se trazó el valor de la función para cada valor del período (T).

- El sector C se encarga de graficar la curva correspondiente a la función antes mencionada. Los cortes de la misma sobre el eje de las abscisas representan posibles valores del período.

La primera sorpresa que tuvimos al observar los gráficos fue precisamente que los cortes eran varios y no sólo uno, el cual correspondería a la solución del problema. Aparentemente, pues, nuestro problema tendría varias “soluciones”. Esto, por supuesto, no tiene sentido físico, ya que los satélites giran alrededor de Júpiter en un intervalo determinado de tiempo, y no en muchos. Debido a esto supusimos que el problema estaba en el carácter no analítico de nuestro método de resolución, y procedimos a averiguar sus causas, y, en la medida de lo posible, a determinar cual de todas las “soluciones” era la que nos interesaba.

Para una mejor comprensión de la siguiente aclaración se sugiere confrontar con los gráficos del apéndice B.

Si las tres mediciones utilizadas corresponden al mismo período, la solución corresponde al último corte de la función sobre el eje de abscisas. Pero, ¿por qué ocurre de esta manera? Dadas tres posiciones en un movimiento armónico, estas no sólo pueden responder a un único período, sino que pueden responder a períodos menores que también pasan por esos puntos. Entre valores más chicos del período, más soluciones matemáticas se pueden llegar a encontrar (es por esto que los cortes de la curva con el eje de las abscisas se multiplican al llegar a valores de  $T$  cercanos a cero). A medida que aumentan los valores del período, en cambio, se encuentran menos, hasta que llegamos al mayor período posible que abarca a los tres puntos considerados, y que es el que responde a la realidad física (ver Fig. 8).

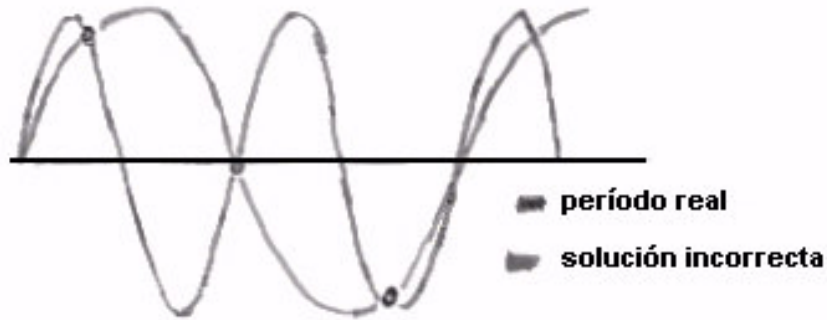


**Caso 1: Mediciones en un mismo período**

Fig. 8

Si, en cambio, las posiciones fueron tomadas en diferentes períodos reales, lo único que podemos hacer es comparar cada solución obtenida con el valor real y elegir la que más se aproxima a ella (esto nos sucedió con los satélites de períodos más breves, es decir, con Io y Europa, de los cuales no pudimos tomar mediciones que correspondieran al mismo período). Procedimos de este modo sólo para comprobar la efectividad del método utilizado y el grado de confiabilidad de las soluciones obtenidas para Ganímedes y Calisto, ya que comprendemos que no resulta útil en sí mismo determinar soluciones por comparación con valores reales. En este caso también verificamos que entre los valores más bajos se

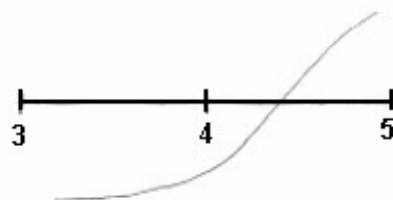
encuentran varias soluciones "matemáticas", que no se corresponden con el valor real (fig. 9).



### Caso 2: Mediciones en distintos períodos

Fig. 9

- Finalmente el sector D del programa se encarga de calcular el valor exacto de ese período por aproximación. Toma dos puntos (uno claramente mayor a la raíz y otro menor) y calcula el valor de la función para ambos. Luego calcula el valor correspondiente al promedio entre dichos puntos. Supongamos que para el valor 3 la función da como resultado negativo, para el 5 da positivo y para su promedio (4), da negativo. En ese caso es evidente que la raíz se encuentra entre el 4 y el 5. El programa toma entonces esos puntos como nuevos extremos y vuelve a realizar la operación antedicha. Sigue así hasta que la diferencia entre los extremos sea tan pequeña que podamos considerar a cualquiera de ellos como la raíz de la función, pues sabemos que la raíz se encuentra entre ambos (fig. 10).



### Ejemplo del cálculo de una raíz

Fig. 10

## Resultados finales obtenidos

Los períodos de revolución obtenidos de cada luna fueron los siguientes:

IO: 1 día, 17 horas, 59 minutos

EUROPA: 3 días, 14 horas, 23 minutos

GANÍMEDES: 7 días, 4 horas, 4 minutos

CALISTO: 16 días, 18 horas, 23 minutos

Siendo los períodos sidéreos reales<sup>5</sup>:

IO: 1 día, 18 horas, 27 minutos

EUROPA: 3 días, 13 horas, 14 minutos

GANÍMEDES: 7 días, 3 horas, 43 minutos

CALISTO: 16 días, 16 horas, 32 minutos

Las discrepancias son:

IO: 1, 1 %

EUROPA: 1,35 %

GANÍMEDES: 0,2 %

CALISTO: 0,46 %

---

<sup>5</sup> Valores tomados de The Astronomical Almanac 1996, Editorial Nautical Almanac Office, USNO, EE.UU., 1996.

## Conclusiones e impresiones finales :

Finalizado el trabajo, llegamos a la conclusión de que los resultados alcanzados fueron *altamente satisfactorios*. Esto se refleja en los *mínimos errores* obtenidos, que nos confirman que hemos realizado un trabajo metuculoso y prolijo.

Comprobamos asimismo que pudimos aplicar *exitosamente* los conceptos de Física, Astronomía, Matemáticas e Informática estudiados en clase.

Al haber sido nuestro *primer trabajo con instrumental astronómico*, el resultado que conseguimos nos impulsa a seguir aprovechando las posibilidades que la experimentación científica nos brinda, como en el caso del análisis del espectro solar, proyecto que estamos comenzando a concretar. Al mismo tiempo, nuestro desenvolvimiento con el instrumental se vio ampliamente mejorado y robustecido.

También resultó de gran importancia la experiencia adquirida mediante la resolución de los problemas que se iban presentando a medida que avanzábamos en nuestra tarea. En este mismo sentido, debemos agregar que este trabajo se distingue especialmente de los que realizamos habitualmente, ya que mientras estos últimos se desarrollan según pautas ya elaboradas y preestablecidas, el presente nos impuso a cada momento nuevas *exigencias* que debíamos ir resolviendo a medida que se iban presentando, de la manera más eficiente y eficaz posible.

Asimismo, nos resultó de utilidad para ejercitar nuestro criterio y para decidir qué circunstancias eran importantes o despreciables a la hora del planteo del problema y del método a emplear para su resolución. En cuanto a esto último, debemos confesar que, en breve, pensamos estudiar más estrictamente y numéricamente la influencia que tuvieron en este trabajo aquellas magnitudes que consideramos despreciables, como la diferencia entre el período sinódico y el sidéreo, la variación del “tiempo -luz” y la pequeña excentricidad de las órbitas de los satélites.

Por último, este trabajo profundizó nuestro *interés y admiración* por el mundo de la astronomía y de las ciencias en general.



## Aplicación de los resultados y proyección de nuevos trabajos:

Como la masa de los satélites galileanos es despreciable con respecto a la de Júpiter, una vez obtenidos sus períodos orbitales, faltaría sólo determinar sus respectivas distancias al centro del planeta para calcular la masa del mismo a partir de la segunda ley de Kepler generalizada por Newton :

$$\frac{T^2 \cdot (M + m)}{r^3} = \frac{4 \pi^2}{G}$$

donde G es la constante de gravitación universal, M la masa de Júpiter, y m, r y T la masa, la distancia al centro del planeta y el período orbital de uno de los satélites, respectivamente.

Como vimos en el presente trabajo, el método planteado no nos es útil para obtener dichas distancias, por lo que debería plantearse otro.

Otro posible trabajo consistiría en utilizar el mismo método para obtener el valor del período orbital de otros satélites, como por ejemplo Titán, el más grande de los cuerpos que orbitan alrededor de Saturno. En este caso, sin embargo, la excentricidad un poco más pronunciada de su órbita (0,029) puede comprometer la exactitud el resultado, ya que su movimiento no puede asimilarse con igual facilidad a un M.A.S.

Otra posibilidad interesante sería la de predecir la posición de los satélites galileanos a partir de los datos obtenidos. Sin embargo, dicha predicción sólo resultaría apropiada durante un intervalo de tiempo relativamente breve, debido a la variación de los elementos orbitales de los satélites, los cuales se hallan permanentemente sometidos a acciones gravitatorias combinadas y complejas entre ellos y los demás cuerpos del Sistema Solar, que impiden que durante un período prolongado de tiempo puedan responder a nuestra descripción buscadamente simplista, la cual elaboramos sólo a fin de conocer las variables que necesitábamos.

# APÉNDICE A

## MEDICIONES ASTRONÓMICAS

Debido al mal clima y otras razones que imposibilitaron trabajar durante un mes, las mediciones se interrumpen bruscamente del 27/9/95 al 27/10/95. Todas las mediciones realizadas a partir de esta última fecha son las que utilizamos para calcular el período de revolución de cada luna (tres por cada una).

FECHA: 20/9/95

Luna: CALISTO

Hora de comienzo: 22:10

Tiempos cronometrados:

27"51	27"62	28"00	27"83	27"76
27"32	27"48	27"65	27"90	27"67

Hora de finalización: 22:24

Tiempo promedio: 27"67

Luna: GANÍMEDES

Hora de comienzo: 22:27

Tiempos cronometrados:

11"70	11"90	11"79	11"74	11"74
12"03	12"64	11"92	12"26	12"11

Hora de finalización: 22:40

Tiempo promedio: 11"98

FECHA: 21/9/95

Luna: CALISTO

Hora de comienzo: 21:08

Tiempos cronometrados:

16"02	15"74	15"61	16"04	15"72
16"00	16"07	16"30	16"23	15"91

Hora de finalización: 21:35

Tiempo promedio: 15"96

Luna: GANÍMEDES

Hora de comienzo: 21:41

Tiempos cronometrados:

10"59	10"72	10"84	11"12	10"96
11"01	10"68	11"10	10"72	11"10

Hora de finalización: 21:50

Tiempo promedio: 10"88

Luna: EUROPA

Hora de comienzo: 21:53

Tiempos cronometrados:

7"65	8"34	7"98	7"89	7"78
------	------	------	------	------

8"05	7"80	8"02	7"81	7"67
------	------	------	------	------

Hora de finalización: 21:58

Tiempo promedio: 7"90

Luna: IO

Hora de comienzo: 22:01

Tiempos cronometrados:

7"26	7"17	6"93	6"95	7"10
------	------	------	------	------

6"98	7"09	6"82	7"18	6"96
------	------	------	------	------

Hora de finalización: 22:07

Tiempo promedio: 7"04

FECHA: 27/9/95

Luna: GANÍMEDES

Hora de comienzo: 21:50

Tiempos cronometrados:

14"24	14"52	14"03	14"22	14"15
-------	-------	-------	-------	-------

14"42	14"53	14"47	14"65	14"44
-------	-------	-------	-------	-------

Hora de finalización: 21:57

Tiempo promedio: 14"37

Luna: CALISTO

Hora de comienzo: 21:58

Tiempos cronometrados:

32"55	32"58	32"37	32"30	32"29
-------	-------	-------	-------	-------

32"37	32"26	32"45	32"26	32"25
-------	-------	-------	-------	-------

Hora de finalización: 22:10

Tiempo promedio: 32"37

Luna: IO

Hora de comienzo: 22:11

Tiempos cronometrados:

2"46	2"49	2"25	2"51
------	------	------	------

2"18	2"36	2"66	2"33
------	------	------	------

2"72	2"53	2"68	2"49
------	------	------	------

Hora de finalización: 22:16

Tiempo promedio: 2"47

Luna: EUROPA

Hora de comienzo: 22:17

Tiempos cronometrados:

6"58          6"39          6"72          6"81          6"53

6"55          6"49          6"39          6"44          6"51

Hora de finalización: 22:22

Tiempo promedio: 6"54

FECHA: 27/10/95

Luna: GANÍMEDES

Hora de comienzo: 20:18

Tiempos cronometrados:

3"59          3"33          3"61          3"38          3"30          3"60

3"54          3"91          3"50          3"59          3"52          3"17

3"39          3"27          3"72          3"48          3"51

Hora de finalización: 20:26

Tiempo promedio: 3"47

Luna: EUROPA

Hora de comienzo: 20:42

Tiempos cronometrados:

7"32          7"35          7"33          7"67          7"55          7"63

7"67          7"28          7"33          7"47          7"28          7"75

7"74          7"48          7"75          7"67          7"27          7"56

7"67          7"33

Hora de finalización: 20:58

Tiempo promedio: 7"48

FECHA: 31/10/95

Luna: CALISTO

Hora de comienzo: 20:27

Tiempos cronometrados:

30"15          30"29          30"21          30"15          30"26

30"10          30"19          30"23          30"10

Hora de finalización: 20:40

Tiempo promedio: 30"19

Luna: IO

Hora de comienzo: 20:41

Tiempos cronometrados:

6"78          6"51          6"73          6"60          6"58

6"64          6"71          6"83          6"87          6"67

Hora de finalización: 22:45

Tiempo promedio: 6"69

Luna: GANÍMEDES

Hora de comienzo: 20:27

Tiempos cronometrados:

9"88            9"67            9"77            9"79            9"80

9"75            9"81            9"68            9"72            9"73

Hora de finalización: 20:54

Tiempo promedio: 9"76

Luna: EUROPA

Hora de comienzo: 20:55

Tiempos cronometrados:

8"67            8"46            8"42            8"54            8"40

8"59            8"46            8"59            8"48            8"45

Hora de finalización: 21:00

Tiempo promedio: 8"51

FECHA: 2/11/95

Luna: CALISTO

Hora de comienzo: 20:28

Tiempos cronometrados:

18"59            18"55            18"43            18"38            18"47

Hora de finalización: 20:42

Tiempo promedio: 18"35

Luna: GANÍMEDES

Hora de comienzo: 20:38

Tiempos cronometrados:

13"29            13"08            12"96

13"04            13"30            12"87

Hora de finalización: 20:46

Tiempo promedio: 13"09

Luna: IO

Hora de comienzo: 20:48

Tiempos cronometrados:

5"59            5"70            5"53

5"59            5"56

Hora de finalización: 20:53

Tiempo promedio: 5"59

Luna: EUROPA

Hora de comienzo: 20:56

Tiempos cronometrados:

9"48	10"02	9"89
10"20	10"24	10"20

Hora de finalización: 20:59

Tiempo promedio: 10"

FECHA: 3/11/95

Luna: IO

Hora de comienzo: 20:16

Tiempos cronometrados:

3"78	4"02	3"75	4"05
4"05	3"86	3"66	3"73
3"79	3"90	3"81	3"74

Hora de finalización: 20:23

Tiempo promedio: 3"84

Luna: CALISTO

Hora de comienzo: 20:27

Tiempos cronometrados:

8"40	8"25	8"08
8"13	8"11	8"09
8"41	8"48	8"04

Hora de finalización: 20:39

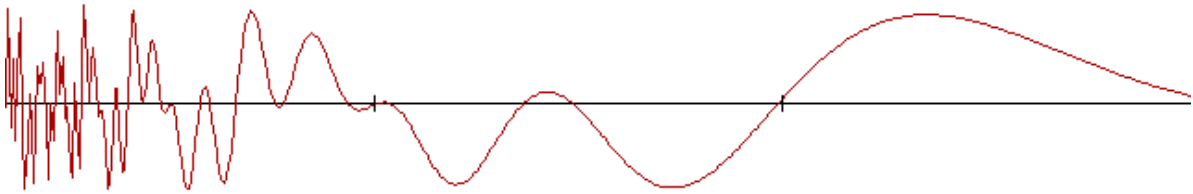
Tiempo promedio: 8"22

# APÉNDICE B

## *Gráficos de la Función*

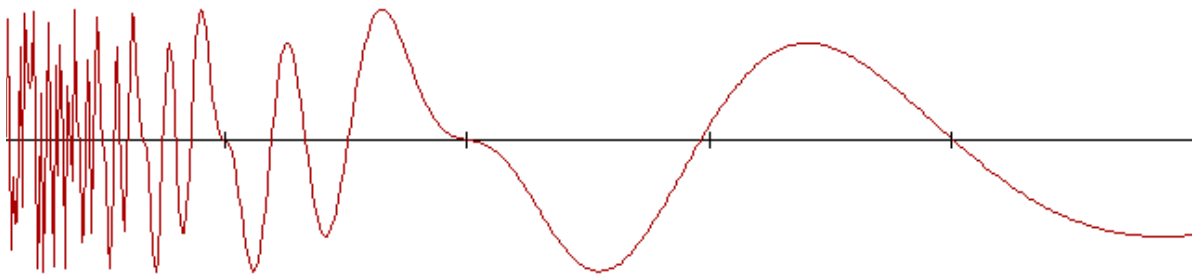
$$F(T) = X_1 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_3 - t_2)] + X_2 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_1 - t_3)] + X_3 \cdot \text{sen} [(2 \cdot \pi / T) (t_2 - t_1)]$$

correspondiente a cada uno de los satélites galileanos



**Periodo de Io: 1 días, 17 horas, 59 minutos**

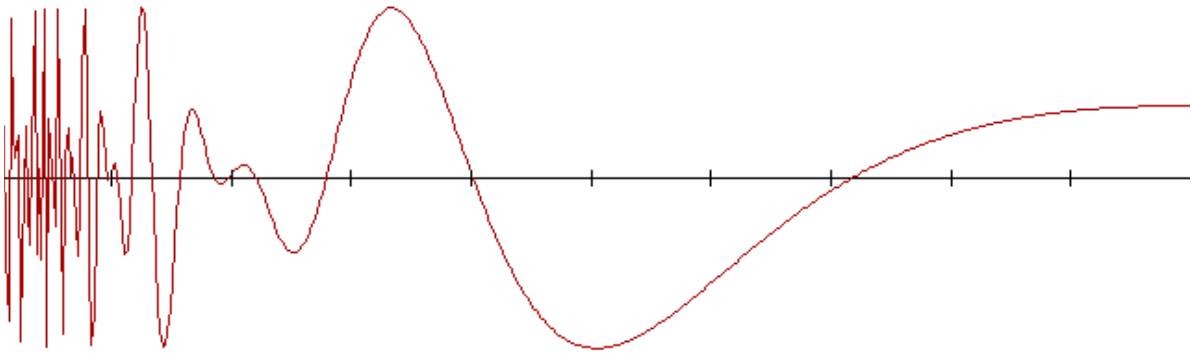
**EUROPA**



**Periodo de Europa: 3 días, 14 horas, 23 minutos**

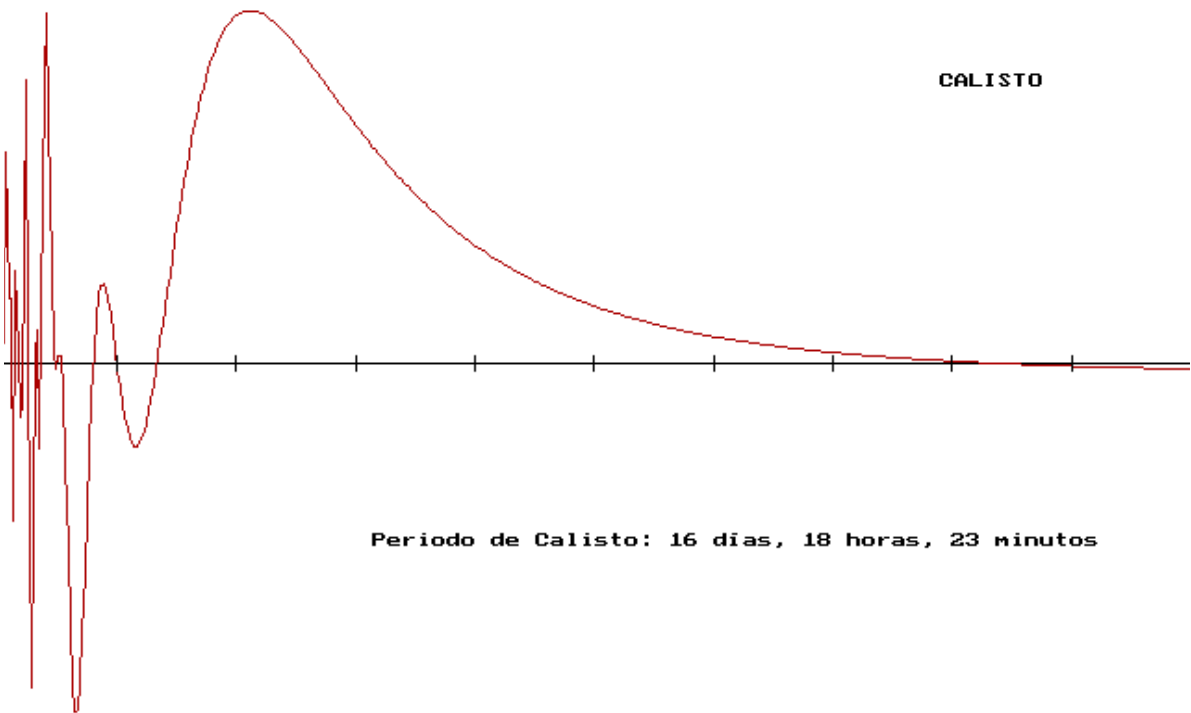


**GANIMEDES**



**Periodo de Ganimedes: 7 días, 4 horas, 4 minutos**

**CALISTO**



**Periodo de Calisto: 16 días, 18 horas, 23 minutos**

## Bibliografía consultada

-Pasachoff, J. M. y Menzel, D. H., Stars and Planets, Ed. Peterson Field Guides, 1992, USA.

-Herrman, Joachim, Atlas de la Astronomía, Ed. Alianza Atlas, Madrid, 1983.

-Menzel, Donald H., Guía de Campo de las Estrellas y los Planetas, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1979.

-Kelly Beatty, J. y Chaikin Andrew, The New Solar System, Third Edition, E.E.U.U., 1990.

-Microsoft Encarta 95, Microsoft Corporation, E.E.U.U., 1995.

-Diccionario Básico Espasa Quince, Ed. Espasa-Calpe S.A., Madrid, 1987.

- The Astronomical Almanac 1996, Editorial Nautical Almanac Office, USNO, EE.UU., 1996.

- Castiglioni, Perazzo, Rela, Física 1, Ed. Troquel, Buenos Aires, 1994.

## Agradecimientos:

Nuestro primer agradecimiento se dirige al Sr. Luis G. López, que tanto ha colaborado en la realización del presente trabajo, al mismo tiempo a todo el personal del observatorio "Héctor Ottonello" del Colegio Nacional de Buenos Aires, siempre dispuesto a todo tipo de consultas; en especial nombramos a su director el Ing. Rodolfo Di Peppe.

Asimismo, debemos mostrar nuestra gratitud a nuestro profesor de Física del colegio el Sr. Oscar A. Perazzo por permitirnos la utilización de su libro Física 1 en la redacción del informe.

Dentro también de la colaboración prestada deseamos expresar nuestro agradecimiento a la "Asociación Cooperadora Amadeo Jacques", que provee de instrumental de alta tecnología a todos los gabinetes del colegio.

Y por último queremos nombrar a dos grandes establecimientos:

- A la Universidad Nacional de General San Martín y a los organizadores del "I Concurso de Proyectos Juveniles de Investigación Científica y Tecnológica 1996" por permitir ampliar nuestros conocimientos en el área de la ciencia y la tecnología y por brindarnos la oportunidad de presentar en público el fruto de nuestros esfuerzos.

- Al Colegio Nacional de Buenos Aires, por permitir el desarrollo científico de sus jóvenes alumnos.